السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الاشتقاق / دراسة الدوال / المتتاليات	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

$$\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[\quad g(x)=2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x}{x^2+2x+2}$$

(I

1

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)=2\times\frac{®}{2}-\frac{-1}{1}=®+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=2\times 0-0=0$$

2

لدينا لكل : $\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[$

$$g(x)'=2\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}-\frac{x^2+2x+2-x(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=2\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}-\frac{x^2+2x+2-2x^2-2x}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$g(x)'=\frac{-2}{(x+1)^2+1}-\frac{2-x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-2(x^2+2x+2)-2+x^2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$g(x)'=\frac{-2x^2-4x-4-2+x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-(x^2+4x+6)}{(x^2+2x+2)^2}<0$$

(لأن : $\Delta=16-24<0$)

منه:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$®+1$	0

3

حسب جدول التغيرات نستنتج أن : $g(x)>0$ $\quad\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[$ (لأن : $g(\left]-1;+\infty\right[)=\left]0,®+1\right[$)

(II

1

نعتبر الدالتين : $p(x)=x-\text{Arctan}\,x$ و $q(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\text{Arctan}\,x$

الدالتان قابلتان للشتقاق على IR .

و لدينا : $\forall x\in IR\quad p(x)=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}\geq 0$ و

$$\forall x\in IR\quad q(x)=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=\frac{x^4}{x^2+1}\geq 0$$

إذن فهما تزايديتان منه : $\begin{cases}p(x)\geq 0\\ q(x)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(x)\geq p(0)\\ q(x)\geq q(0)\end{cases}\Rightarrow x\geq 0$ منه : ≥ 0 $\begin{cases}\forall x\in[0;+\infty[\quad p(x)\geq 0\\ \forall x\in[0;+\infty[\quad q(x)\end{cases}$

و هذا يعني : $\forall x\in[0;+\infty[\quad 0\leq x-\text{Arctan}\,x\leq\frac{1}{3}x^3$

مبرهنة التزايدات المنتهية غير مفيدة في هذه الحالة بسبب عدم نجاعة التأطير بعد حساب المشتقة.

2

بما أن : $\forall x>0\quad 0\leq\frac{x-\text{Arctan}\,x}{x^2}\leq\frac{1}{3}x$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}0=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{3}x=0$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\text{Arctan}\,x}{x^2}=0$

III

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-2}{®}x^2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+2 & ; x>-1 \\ f(x)=-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1 & ; x\le -1 \end{cases}$$

1 لدينا :

$$Df=\{x\in\left]-1;+\infty\right[/ x+1\neq 0\}\cup\{x\in\left]-\infty;-1\right] / -x^3-x^2\ge 0\}$$
$$Df=\left]-1;+\infty\right[\cup\{x\in\left]-\infty;-1\right] / -x^2(x+1)\ge 0\}$$
$$Df=\left]-1;+\infty\right[\cup\{x\in\left]-\infty;-1\right] / (x+1)\le 0\}$$
$$Df=\left]-1;+\infty\right[\cup\left]-\infty;-1\right]$$
$$Df=IR$$

2 لدينا الدالة $h: x\mapsto \dfrac{1}{x+1}$ متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ و $h(\left]-1;+\infty\right[)\subset IR$ و الدالة $x\mapsto \text{Arctan}(x)$ متصلة على IR إذن الدالة $x\mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ ، ولدينا أيضا الدالة $x\mapsto\dfrac{-2}{®}x^2$ متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ إذن f متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$

ولدينا الدالة الحدودية $s: x\mapsto -x^3-x^2$ متصلة على IR و $s(\left]-\infty;-1\right])\subset\left[0;+\infty\right[$ و الدالة $x\mapsto -\sqrt[3]{x}$ متصلة على $\left[0;+\infty\right[$ إذن $x\mapsto -\sqrt[3]{x^3-x^2}$ متصلة على $\left]-\infty;-1\right]$ ، إذن: f متصلة على $\left]-\infty;-1\right]$

من جهة أخرى لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{-2}{®}x^2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+2=\dfrac{-2}{®}\times 1\times\dfrac{®}{2}+2=-1+2=1$

و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1=1$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=f(-1)$

بالتالي f متصلة على IR

3 لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{\frac{-2}{®}x^2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+1}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{\frac{-2}{®}x^2\left(\frac{®}{2}-\text{Arctan}(x+1)\right)+1}{x+1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{-x^2+\frac{2}{®}\text{Arctan}(x+1)+1}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{1-x^2}{x+1}+\frac{\frac{2}{®}\text{Arctan}(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}1-x+\frac{2}{®}\,\frac{\text{Arctan}(x+1)}{x+1}=1-(-1)+\frac{2}{®}\times 1=2+\frac{2}{®}$$

بالتالي f قابلة للاشتقاق يمين -1 و لدينا : $f'_d(-1)=2+\dfrac{2}{®}$

4

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-\sqrt[3]{-x^3-x^2}}{x+1}=\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}}\frac{-\sqrt[3]{t^3-t^2}}{-t+1}=\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}}\frac{\sqrt[3]{t^2(t-1)}}{t-1}=\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}}\sqrt[3]{\frac{t^2}{(t-1)^2}}=+\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق يسار -1 ، لكن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول -1 .

وضعنا $t=-x$ تفاديا لأخطاء الإشارة داخل الجذر مكعب.

5

لدينا :

$$\underset{x\to+\infty}{\ell im}\ f(x)+\frac{2}{\text{®}}x-\frac{2}{\text{®}}-2=\underset{x\to+\infty}{\ell im}\ \frac{-2}{\text{®}}x^2\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+2+\frac{2}{\text{®}}x-\frac{2}{\text{®}}-2$$

$$=\underset{x\to+\infty}{\ell im}\ \frac{2}{\text{®}}x\left(-x\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+1\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$=\underset{\substack{t\to0\\t>0}}{\ell im}\ \frac{2}{\text{®}}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{Arctan}(t)+1\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$=\underset{\substack{t\to0\\t>0}}{\ell im}\ \frac{2}{\text{®}}\left(\frac{1-t}{t}\right)\left(\ \mathrm{Arctan}(t)+\frac{t-\mathrm{Arctan}(t)}{t}\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$=\underset{\substack{t\to0\\t>0}}{\ell im}\ \frac{2}{\text{®}}(1-t)\left(\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}+\frac{t-\mathrm{Arctan}(t)}{t^2}\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\ell im}\ f(x)+\frac{2}{\text{®}}x-\frac{2}{\text{®}}-2=\frac{2}{\text{®}}\times(1-0)(1+0)-\frac{2}{\text{®}}=0$$

بالتالي : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=\frac{-2}{\text{®}}x+\frac{2}{\text{®}}+2$ $:(\Delta_1)$ جوار $+\infty$

6

$$\underset{x\to-\infty}{\ell im}\ -\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1-x-\frac{4}{3}=\underset{t\to+\infty}{\ell im}\ -\sqrt[3]{t^3-t^2}+t-\frac{1}{3}=\underset{t\to+\infty}{\ell im}\ t-\sqrt[3]{t^3-t^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\underset{t\to+\infty}{\ell im}\ \frac{t^3-\left(t^3-t^2\right)}{t^2+t\sqrt[3]{t^3-t^2}+\left(\sqrt[3]{t^3-t^2}\right)^2}-\frac{1}{3}$$

$$\underset{x\to-\infty}{\ell im}\ -\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1-x-\frac{4}{3}=\underset{t\to+\infty}{\ell im}\ \frac{t^2}{t^2\left[1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{t}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{t}}\right)^2\right]}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

إذن : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x+\frac{4}{3}$ $:(\Delta_2)$ جوار $-\infty$

7

$$f'(x)=\frac{-2}{\text{®}}\left(2x\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+x^2\,\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\right)$$

لدينا لكل $x>-1$:

$$f'(x)=\frac{-2}{\text{®}}\left(2x\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+x^2\,\frac{-1}{1+(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{\text{®}}\left(2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x}{1+(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{\text{®}}\ g(x)$$

و لكل $x<-1$:

$$f'(x)=\left(-\left(-x^3-x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{-1}{3}\left(-x^3-x^2\right)^{\frac{1}{3}-1}\times\left(-x^3-x^2\right)'=\frac{x(3x+2)}{3\left(\sqrt[3]{-x^3-x^2}\right)^2}$$

8

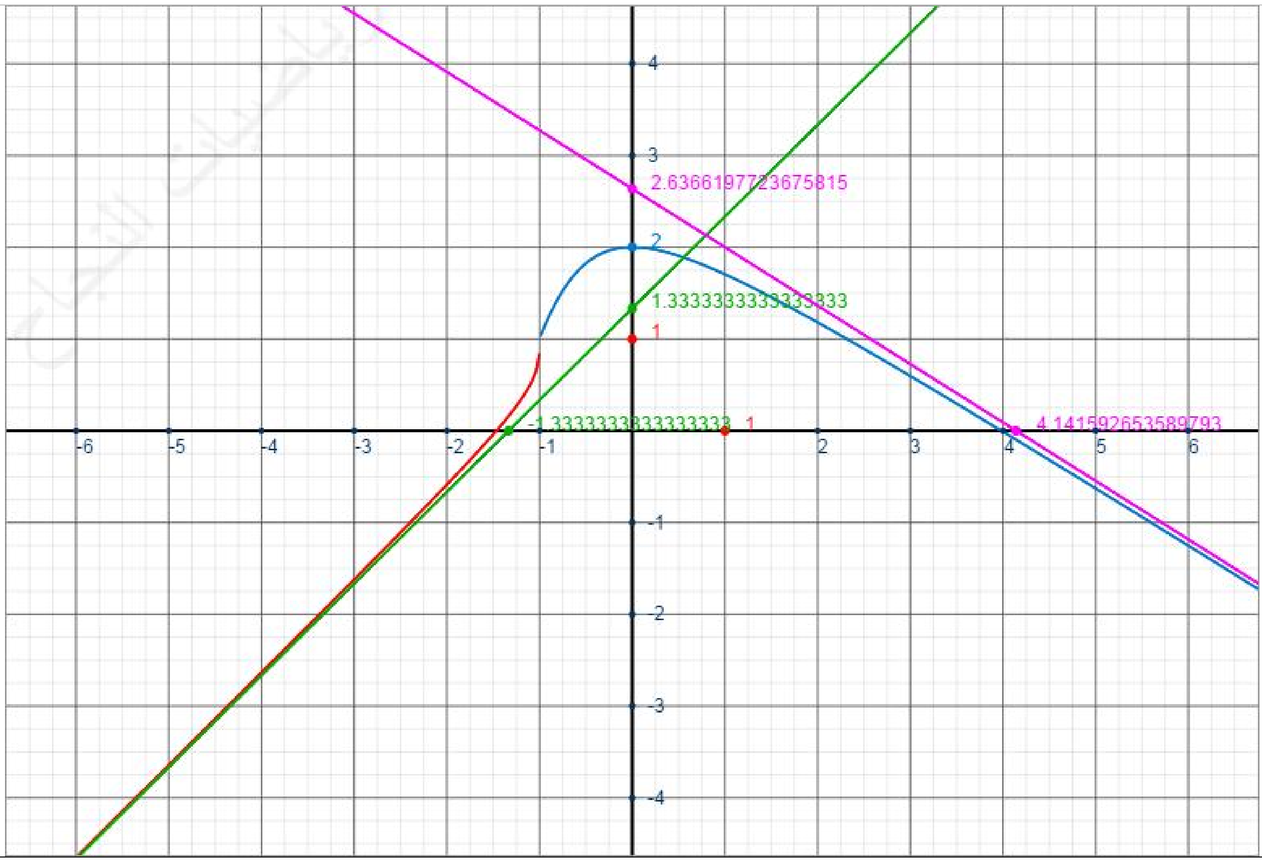
بما أن : $g(x)>0 \quad \forall x>-1$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة x على $]-1;+\infty[$

ولدينا : $x<-1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ 3x+2<-1<0 \end{cases} \Rightarrow x(3x+2)>0 \Rightarrow g(x)>0$

منه:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	1	↗	$+\infty$

9



تمرين 2 : $u_0=1$ و $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{u_n} \quad (\forall n\in IN)$

1

بالنسبة لـ $n=0$ لدينا $u_0\geq 1$

نفترض أن $u_n\geq 1$ و نبين أن : $u_{n+1}\geq 1$

لدينا : $u_n\geq 1 \Rightarrow u_{n+1}-1=\dfrac{1}{u_n}>0 \Rightarrow u_{n+1}\geq 1$ ، بالتالي بالنسبة بين أن : $u_n\geq 1 \quad (\forall n\in IN)$

$v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$

2 أ)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ و الدالة : $g(x)=f\circ f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$

لدينا : $w_n=u_{2n+1}=f(u_{2n})=f(v_n)$ و $v_{n+1}=u_{2n+2}=f(u_{2n+1})=f(w_n)$

منه : $w_{n+1}=f(v_{n+1})=f(f(w_n))=g(w_n)$ و $v_{n+1}=f(w_n)=f(f(v_n))=g(v_n)$

من جهة أخرى لدينا : $\forall(x,y)\in]0;+\infty[\quad x>y \Rightarrow x+1>y+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{y+1} \Rightarrow \dfrac{-1}{x+1}>\dfrac{-1}{y+1} \Rightarrow g(x)<g(y)$

إذن g تزايدية على $]0;+\infty[$

	الآن لدينا : $v_0=u_0=1$ و $w_0=u_1=2$ و $v_1=u_2=\frac{3}{2}$ و $w_1=u_3=\frac{5}{3}$ منه : $v_1>v_0$ و $w_1<w_0$ نفترض أن $v_{n+1}>v_n$ و $w_{n+1}<w_n$ إذن ولكون g تزايدية على $]0;+\infty[$ فإن : $g(v_{n+1})>g(v_n)$ و $g(w_{n+1})<g(w_n)$ منه : $v_{n+2}>v_{n+1}$ و $w_{n+2}<w_{n+1}$ بالتالي : $v_{n+2}>v_{n+1}\quad \forall n\in IN$ و $w_{n+2}<w_{n+1}\quad \forall n\in IN$ أي أن (v_n) تزايدية و أن (w_n) تناقصية.
ب)	لدينا : $v_{n+1}-w_{n+1}=\left(2-\frac{1}{1+v_n}\right)-\left(2-\frac{1}{1+w_n}\right)=\frac{1}{1+w_n}-\frac{1}{1+v_n}=\frac{v_n-w_n}{(1+v_n)(1+w_n)}$ منه : $\left\|\frac{v_{n+1}-w_{n+1}}{v_n-w_n}\right\|=\frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)}$ ولكون : $u_n\ge 1\quad(\forall n\in IN)$ فإن : $\begin{cases}v_n\ge 1\\ w_n\ge 1\end{cases}\quad(\forall n\in IN)$ منه : $\frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)}\le\frac{1}{4}$ بالتالي : $\|v_{n+1}-w_{n+1}\|\le\frac{1}{4}\|v_n-w_n\|\quad(\forall n\in IN)$
	يمكن أيضا استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، لكن سهولة الحساب تجعل هذه الطريقة أفضل.
ج)	باستعمال س ب) وبتعويض n بقيم متتابعة وبضرب المتفاوتات المحصل عليها طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد : $\|v_n-w_n\|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n\|v_0-w_0\|\quad(\forall n\in IN)$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-w_n)=0$ ولكون (v_n) و (w_n) إحداهما تزايدية والأخرى تناقصية فهما متحاذيتان
د)	بما أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان فهما متقاربتان و لهما نفس النهاية ℓ ، إذن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ ولكون : $u_{n+1}=f(u_n)$ و f متصلة على $[1;+\infty[$ و $f([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ فإن : $f(\ell)=\ell$ هذه المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر هو العدد الذهبي : $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
	الاستنتاج هنا اعتمد على الخاصية : إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\ell$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ و التي نبرهن عنها باستعمال التعريف. (انظر الكتاب المدرسي ت ص 72 س5)